

PENYELESAIAN MODEL SIR UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT HIV/AIDS MENGUNAKAN METODE EULER DAN METODE HEUN

Roberta Uron Hurit, Bernadus Bin Frans Resi
Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka

uronhurit@gmail.com, bernadusbinfrans.resi@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan model SIR transmisi HIV/AIDS menggunakan metode Euler dan metode Heun, dimana model persamaannya berupa persamaan diferensial nonlinear. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka dan simulasi. Secara teori, metode Heun memiliki ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode Euler. Dari hasil simulasi, kedua metode tersebut menghasilkan solusi dengan perilaku yang mirip yaitu semua gambar grafik pada setiap simulasi mempunyai bentuk pola yang sama, hal ini menunjukkan ada kesesuaian dari semua metode dalam simulasi MATLAB.

Kata Kunci : HIV/AIDS, Model SIR, Metode Euler, Metode Heun.

ABSTRACT

This study aims to solve the HIV/AIDS SIR model using the Euler method and the Heun method, where the equation model is a differential differential equation. The research method used is a literature study and simulation method. In theory, Heun's method has higher accuracy than Euler's method. From the simulation results, the two methods produce solutions with similar behavior, namely all images in each simulation have the same pattern shape, this indicates an adjustment of all methods in the MATLAB simulation.

Keywords: HIV/AIDS, SIR Model, Euler Method, Heun Method.

PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah Jenis virus yang tergolong dalam familia retrovirus. HIV dapat menyebabkan Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS) yakni dengan menyerang sel darah putih yang bernama CD4 atau sel-sel limfosit T. Hal ini menyebabkan kerusakan pada sistem kekebalan tubuh manusia sehingga tidak dapat bertahan dari gangguan penyakit apapun sekalipun penyakit yang diderita sangat ringan. Sel darah putih sangat diperlukan dalam tubuh manusia karena sel darah putih berfungsi untuk membantu tubuh melawan berbagai penyakit infeksi sebagai bagian dari sistem kekebalan tubuh. Tanpa kekebalan tubuh maka penyakit apapun yang menyerang tubuh tidak akan terlindungi (Desyanawati, Palgunadi, Cahyono, 2016). HIV menyerang sel CD4 dan merubahnya menjadi virus HIV baru yang terus berkembang biak kemudian merusaknya sehingga tidak dapat digunakan lagi. Hal ini berdampak pada seringnya apapun penyakit yang menyerang tubuh dapat mengakibatkan kematian.

Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS) adalah dampak dari perkembangbiakan virus HIV dalam tubuh manusia. Virus HIV membutuhkan waktu untuk menyebabkan AIDS yang mematikan dan sangat berbahaya. Penyakit AIDS disebabkan oleh sistem kekebalan tubuh yang sebelumnya dimiliki melemah atau menghilang akibat virus HIV telah merusak sel CD4 dalam tubuh manusia. Ketika manusia terinfeksi virus HIV manusia tidak langsung terkena AIDS, tetapi dibutuhkan waktu yang lama untuk menjadi AIDS. Rentang waktu terinfeksi virus HIV menjadi penyakit AIDS yaitu beberapa tahun setelah terinfeksi. Hingga saat ini belum ada obat, vaksin maupun serum yang dapat menyembuhkan penyakit AIDS maupun mencegah berkembangbiaknya virus HIV (Tholleng & Komalig, 2013).

Salah satu teknik yang dapat digunakan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit adalah model matematika. Model matematika diformulasi berdasarkan karakteristik dari penyakit tersebut. Model matematika yang akan diformulasi adalah model epidemik SIR dimana populasi dibagi kedalam

kelompok susceptible (S) yakni individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS, infected (I) yakni individu yang telah terserang dan dapat menularkan penyakit dan recovered (R) yakni individu yang telah sembuh dari penyakit transmisi penyakit tersebut. (Hurit & Mungkasi, 2021). Penelitian relevan tentang "Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model Penyebaran Hiv/Aids Dengan Treatment" Oleh Ahmad Julul Zamzami, Stevanus Budi Waluya, dan Muhammad Kharis. Fokus penelitian membahas membangun model matematika, menganalisis titik kestabilan, dan menginterpretasikan simulasi model matematika dengan Maple. Simulation of the spreading of Infectious Disease HIV/AIDS in Central Java Using SIR Epidemic Model (Susceptible, Infected, removed). Oleh Ely Desyanawati, Sarngadi Palgunadi, dan Hasan Dwi Cahyoni.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan model SIR transmisi HIV-AIDS menggunakan Metode Euler dan metode Heun. Metode Euler merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial derajat pertama dengan nilai awal yang diberikan, metode Heun adalah sebuah metode baru untuk melihat tingkat keakuratan yang lebih tinggi atau lebih dikenal metode perbaikan dari metode Euler (Hurit & Mungkasi, 2021). Hasil simulasi dari kedua metode tersebut akan dilihat apakah memiliki kesamaan dalam perilaku solusinya.

METODE PELAKSANAAN

Metode penelitian yang digunakan adalah pemrograman dan simulasi, yaitu (a) pemrograman komputer metode Euler dan metode Heun, (b) simulasi untuk memecahkan model SIR penyebaran HIV-AIDS. Tahapan penelitian dimulai dari. (Hurit & Mungkasi):

1. Menerapkan model SIR untuk penyebaran HIV-AIDS Populasi jarum suntik
2. Diskritisasi numerik model SIR berdasarkan metode Euler dan Heun
3. Pemrograman komputer dari diskritisasi model SIR ke dalam perangkat lunak MATLAB
4. Simulasi numerik penyebaran HIV-AIDS menggunakan program komputer MATLAB;
5. Pengamatan grafik solusi yang dihasilkan oleh program komputer MATLAB. Untuk lebih jelasnya berikut ini menjelaskan bentuk model SIR, metode Euler, metode Heun.

MODEL SIR

Pada model SIR, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan $S(t)$ yang merupakan subpopulasi yang rentan terhadap penyakit, yang terinfeksi $I(t)$ yang merupakan subpopulasi yang telah terinfeksi dan aktif menularkan penyakit, dan sembuh $R(t)$ yang merupakan subpopulasi yang sembuh dari penyakit (Allmandan & Rhodes, 2004). Di sini t adalah variabel waktu.

Penelitian yang berhubungan dengan pemodelan matematika tentang penyakit HIV/AIDS sudah dilakukan oleh beberapa ahli. (Desyanawati, E., Palgunadi, S., Cahyono, H. D) Menurut penelitian Bayarama et.al(2006) yaitu pada penelitiannya mengacu pada model jenis SIR epidemi dijelaskan oleh persamaan diferensial. Model matematikanya disajikan dalam Sistem persamaan. (Zamzami, Waluya & Kharis)

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= B - \eta(A) \frac{SI}{N} - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \eta(A) \frac{SI}{N} - (\nu + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I - (\sigma + \mu)R\end{aligned}$$

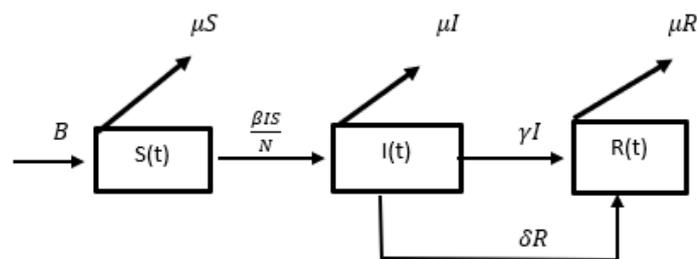
Penjelasan masing-masing parameter di atas dapat dilihat pada table 1.

Model matematika tentang penyakit HIV/AIDS dikembangkan oleh Hia et al. (2012) yang pada jurnalnya menjelaskan tentang model SIR pada penyakit HIV/AIDS dengan melihat probabilitas masing-masing variabel. Model matematikanya disajikan dalam Sistem persamaan.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= B - \mu S - \beta S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta)R\end{aligned}$$

Penjelasan masing-masing parameter di atas dapat dilihat pada table 1.

Diagram transfer penyebaran penyakit pada suatu populasi dapat disajikan pada gambar 1 di bawah ini



Gambar 1. Diagram Tranfer Penyebaran HIV/AIDS

Diagram transfer model SIR pada Gambar 1 menunjukkan transisi setiap state sebagai dinamika dalam populasi. Pada keadaan awal individu dapat dikatakan rentan yang dapat berpindah ke individu yang terpajan, namun individu tersebut belum sepenuhnya terinfeksi penyakit karena masih mengalami masa inkubasi. Setelah mengalami masa inkubasi, individu akan menjadi terinfeksi sepenuhnya, maka lama kelamaan populasi yang terpapar (setelah melewati masa inkubasi) masuk ke dalam populasi yang terinfeksi. Dengan demikian, populasi yang terpapar (inkubasi) berkurang dan dapat dikatakan individu menjadi terinfeksi. Hal ini menyebabkan peningkatan populasi yang terinfeksi. Selanjutnya setelah individu tersebut terinfeksi kemudian sembuh maka individu tersebut termasuk dalam kategori sembuh.. Setiap populasi pada model SIR ini memiliki kematian alami pada setiap subpopulasi, baik yang disebabkan oleh penyakit itu sendiri maupun faktor lain. Artinya, faktor kematian alami juga menyebabkan penurunan (pengurangan) pada subpopulasi yang rentan, terpapar, terinfeksi, dan pulih (Allmandan & Rhodes, 2004; Hurit, 2020). Sebagai asumsi tambahan, total populasi dalam sistem adalah konstan, dan tidak ada migrasi

Tabel 1. Parameter dan deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi
B	Laju individu yang masuk kelas rentan
β	Laju penularan penyakit dari individu rentan menjadi individu laten .
γ	Laju perpindahan dari populasi yang tertular ke populasi penderita
δ	Laju kesembuhan tiap individu
μ	Laju kematian dan kelahiran tiap individu
h	Langkah waktu untuk model SIR yang didiskritkan

Metode Euler/ Metode Runge-Kutta Orde Satu

persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = a \quad (1)$$

Metode Euler diturunkan dari deret Taylor. Misalnya, fungsi $y(t)$ adalah fungsi yang kontinu dan memiliki turunan dalam interval $[a, b]$. Maka dalam deret Taylor. (Hurit & Mungkasi, 2021).

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\varepsilon_i) \quad (2)$$

karena $h = (t_{i+1} - t_i)$, maka

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\varepsilon_i) \quad (3)$$

dan, karena $y(t)$ memenuhi persamaan diferensial (1),

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\varepsilon_i) \quad (4)$$

metode ini dibangun dengan pendekatan $w_i \approx y(t_i)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N$,

Jadi metode Euler dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} w_0 &= a \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) \end{aligned} \quad (5)$$

dimana $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Metode Heun/ Metode Runge-Kutta Orde Dua

Metode Heun ini biasa dikenal sebagai perbaikan metode Euler serta tingkat keakuratannya lebih tinggi dibandingkan dengan euler (Hurit & Mungkasi, 2021). Pada metode heun, solusi dari perkiraan awal metode Euler disebut predictor serta diperbaiki dengan menggunakan metode heun disebut *corrector*. Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode Heun merupakan suatu proses mencari nilai fungsi pada titik tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(t, y)$. Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu yang mempunyai syarat awal $(t_0) = y_0$

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad (6)$$

Persamaan di atas diintegrasikan pada kedua sisinya dengan batasan dari t_i hingga t_{i+1} dengan $h = t_{i+1} - t_i$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt \\ y(t) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt \end{aligned}$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt \quad (7)$$

Selanjutnya, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t), t) dt$ dapat dicari dengan menggunakan kaidah trapesium, sehingga diperoleh persamaan baru yang disebut persamaan Heun. (Hurit, R. U., & Mungkasi, S.)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(y_i, t_i) + f(y_{i+1}, t_{i+1})]$$

dengan: y_{i+1} adalah hampiran sekarang dan y_i adalah hampiran sebelumnya, dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Nilai y_{i+1} merupakan solusi perkiraan awal (*predictor*) metode Heun yang dihitung menggunakan metode Euler. (Ningsi, G. P & Mungkasi, S). Sehingga persamaan Heun dapat ditulis sebagai berikut:

predictor:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i) \quad (8)$$

Corrector :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(y_i, t_i) + f(\bar{y}_{i+1}, t_{i+1})] \quad (9)$$

Dengan, $h = t_{i+1} - t_i$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini melaporkan hasil simulasi dan pembahasan tentang Pemrograman numerik dan simulasi dilakukan dengan menggunakan software MATLAB. Untuk semua simulasi, nilai awal dan nilai parameter disajikan pada Tabel 2. Perlu dicatat bahwa semua nilai parameter dan nilai awal pada Tabel 2 adalah asumsi. Nilai pada Tabel 2 dipilih secara khusus dengan pertimbangan bahwa hasil simulasi akan cukup akurat dan proses simulasi relatif singkat (simulasi hanya beberapa detik pada komputer laptop). Bagian ini berisi dua subbagian. Subbagian pertama berisi solusi untuk model SIR menggunakan metode Euler. Subbagian kedua melaporkan solusi model SIR menggunakan metode Heun.

Tabel 2 Nilai Awal dan Nilai Parameter Transmisi HIV/AIDS

Kondisi awal dan Parameter	Nilai Kondisi Awal dan Parameter		
	Simulasi I	Simulasi II	Simulasi III
A	0.100	0.100	0.100
β	0.80	0.80	0.80
γ	0.60	0.60	0.60
σ	0.50	0.50	0.50
μ	0.12	0.12	0.12
$S(t_0) = S_0$	10	10	10
$I(t_0) = I_0$	5	2	5
$R(t_0) = R_0$	0	0	2
h	0.1	0.1	0.1

Penyelesaian Model SIR dengan Metode Euler

Rumusan metode Euler untuk menyelesaikan model SIR penyebaran HIV-AIDS dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S_{n+1} = S_n + \Delta t \left(B - \mu S_n - \beta S_n \frac{I_n}{N} \right),$$

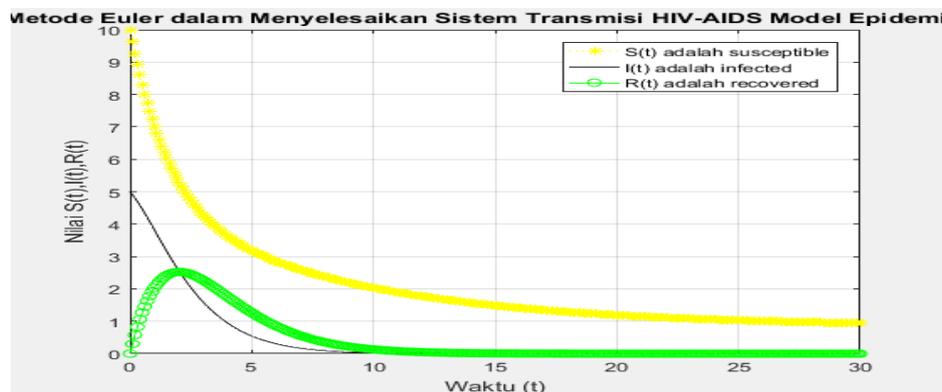
$$I_{n+1} = I_n + \Delta t \left(\beta S_n \frac{I_n}{N} - (\mu + \gamma) I_n \right),$$

$$R_{n+1} = R_n + \Delta t (\gamma I_n - (\mu + \delta) R_n)$$

Dengan memasukan nilai awal pada Tabel 2 maka akan diperoleh simulasi penyelesaian model SIR pada metode Euler sebagai berikut:

Simulasi I

Nilai data awal pada Tabel 2 untuk Simulasi I dengan $h = 0.1$ pada persamaan model SIR di atas diperoleh sebuah grafik penyelesaian, yaitu:

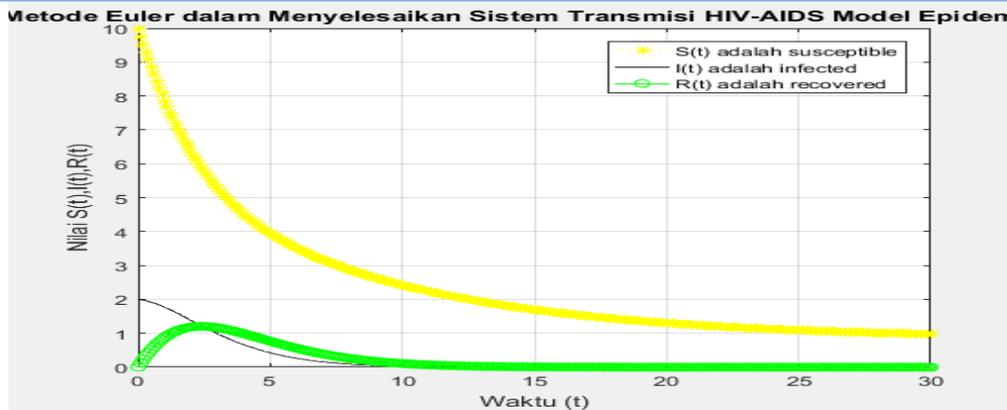


Gambar 2. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Euler (Simulasi I)

Gambar 2 Menunjukkan solusi penyelesaian transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Euler pada simulasi I. Gambar ini menunjukkan ketika kondisi awal diketahui dan nilai parameter diketahui terlihat jelas bahwa model epidemi SIR terjadi. Pada kondisi ini diasumsikan bahwa ada populasi yang terkena penyakit HIV/AIDS pada populasi terinfeksi.

Simulasi II

Dengan menggunakan program MATLAB untuk simulasi II diperoleh grafik solusi seperti Gambar 3 di bawah ini

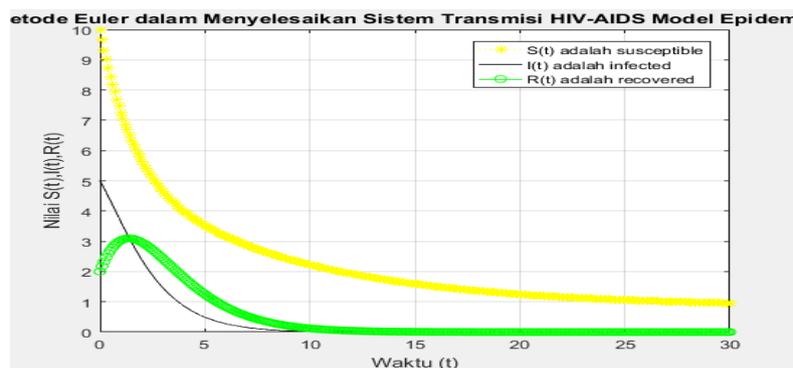


Gambar 3. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Euler (Simulasi II)

Gambar 3 menunjukkan solusi penyelesaian transmisi meningitis model epidemi SIR menggunakan metode Euler pada simulasi II. Pada gambar ini kurva yang dihasilkan relatif sama dengan kurva pada Gambar 1 dengan sedikit penurunan, karena nilai awal populasi infected mengalami perubahan. Seiring waktu, subpopulasi yang terpapar dan yang terinfeksi mendekati tanpa gejala. Pada saat yang sama, subpopulasi yang rentan dan yang pulih bergerak menuju nilai keseimbangannya

Simulasi III

Dengan menggunakan program MATLAB untuk simulasi III diperoleh grafik penyelesaian solusi seperti Gambar 4 di bawah ini:



Gambar 4. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi meningitis model epidemi SIR menggunakan metode Euler (Simulasi III)

Gambar 4 menunjukkan populasi yang rentan akan berkurang secara bertahap, pada gambar ini juga terlihat bahwa adanya interaksi antara populasi terinfeksi dan populasi pemulihan.

Menyelesaikan Model SIR Menggunakan Metode Heun

Metode Heun untuk menyelesaikan model SIR yang dianggap memiliki skema numerik prediktor-korektor adalah sebagai berikut:

Predictor

$$\begin{aligned}\bar{S}_{n+1} &= S_n + h \left(B - \mu S_n - \beta S_n \frac{I_n}{N} \right), \\ \bar{I}_{n+1} &= I_n + h \left(\beta S_n \frac{I_n}{N} - (\mu + \gamma) I_n \right), \\ \bar{R}_{n+1} &= R_n + h (\gamma I_n - (\mu + \delta) R_n)\end{aligned}$$

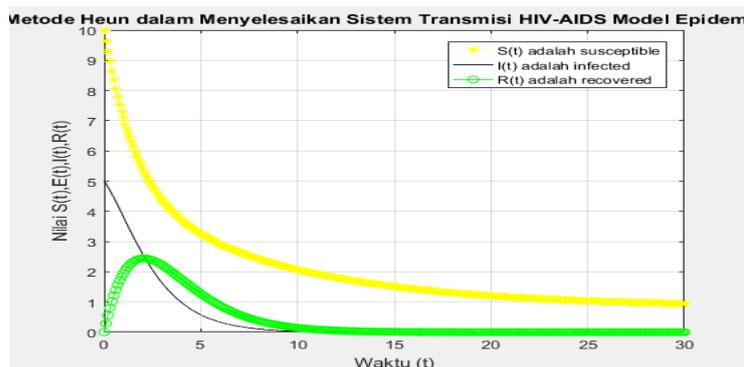
Corrector

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n + \frac{h}{2} \left[\left(B - \mu S_n - \beta S_n \frac{I_n}{N} \right) + \left(B - \mu \bar{S}_{n+1} - \beta \frac{\bar{S}_{n+1} \bar{I}_{n+1}}{N} \right) \right], \\ I_{n+1} &= I_n + \frac{h}{2} \left[\left(\beta S_n \frac{I_n}{N} - (\mu + \gamma) I_n \right) + \left(\beta \frac{\bar{S}_{n+1} \bar{I}_{n+1}}{N} - (\mu + \gamma) \bar{I}_{n+1} \right) \right], \\ R_{n+1} &= R_n + \frac{h}{2} [(\gamma I_n - (\mu + \delta) R_n) + (\gamma \bar{I}_{n+1} - (\mu + \delta) \bar{R}_{n+1})]\end{aligned}$$

Berdasarkan model pada persamaan Heun akan di simulasi model penyelesaian penyakit HIV/AIDS menggunakan data awal pada Tabel 2.

Simulasi I

Dengan menggunakan program MATLAB untuk simulasi I diperoleh grafik penyelesaian solusi seperti Gambar 5 di bawah ini:

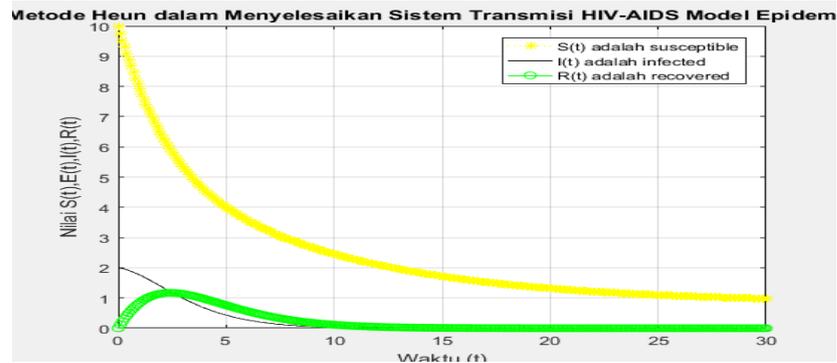


Gambar 5. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Heun (Simulasi I)

Dari Gambar 5 dapat dilihat bahwa grafik pendekatan ini cukup akurat dibandingkan dengan grafik pada metode Euler. Seiring waktu, mayoritas individu dalam sistem jatuh ke dalam kelompok pulih dan sebagian kecil berada dalam kelompok rentan. Dalam jangka waktu yang lama, jumlah individu dalam kelompok yang terpapar dan terinfeksi hampir nol.

Simulasi II

Berdasarkan MATLAB akan diperoleh grafik penyelesaian model SIR sebagai berikut:

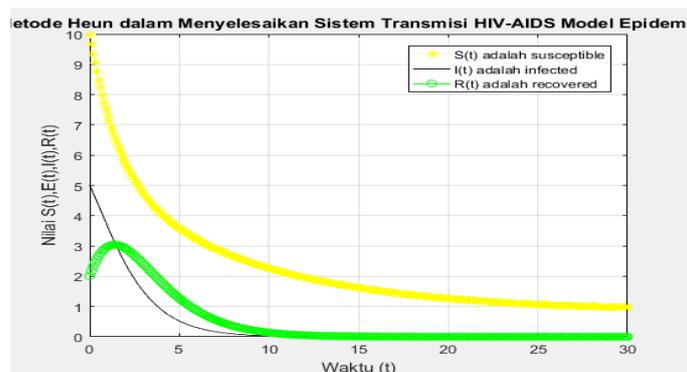


Gambar 6. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Heun (Simulasi II)

Gambar 6 menunjukkan adanya interaksi antara populasi terinfeksi dan pemulihan dari penyakit, hal ini terjadi ketika kita mengganti nilai awal untuk melihat seberapa besar laju infeksi dari penyakit tersebut. Semakin rendah nilai awal yang diberikan maka laju penularan penyakit berkurang seiring bertambahnya waktu

Simulasi III

Berdasarkan MATLAB akan diperoleh grafik penyelesaian model SIR sebagai berikut:



Gambar 7. Grafik penyelesaian solusi sistem transmisi HIV/AIDS model epidemi SIR menggunakan metode Heun (Simulasi III)

Grafik pada semua gambar menunjukkan perilaku yang sama dan hasil yang serupa untuk kelompok rentan $S(t)$, kelompok terinfeksi $I(t)$, dan kelompok pulih $R(t)$. Tampaknya seiring berjalannya waktu, kelompok pulih semakin besar mendekati keseimbangannya, sedangkan kelompok terpapar dan kelompok terinfeksi semakin kecil menuju nol, dan kelompok rentan menuju keseimbangan konstan. Hal ini menunjukkan bahwa perubahan terjadi berdasarkan penentuan nilai awal.

SIMPULAN

Penyelesaian dari model ini berupa grafik solusi yang dihasilkan secara numerik menggunakan simulasi pada program MATLAB. Dari hasil analisis pada grafik solusi menunjukkan kedua metode tersebut menghasilkan solusi dengan perilaku yang sama, namun demikian perlu diingat kembali bahwa Metode

Heun merupakan perbaikan dari metode Euler sehingga secara teori memiliki tingkat keakuratan lebih tinggi. namun kedua model ini sangat cocok untuk menyelesaikan solusi persamaan nonlinear.

UCAPAN TERIMAKASIH

Kedua penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dan membantu penulis, khususnya LPPM Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka untuk semua kontribusi pada penelitian ini.

REFERENSI

- Hurit, R. U. (2020). Penyelesaian model SEIR untuk Penyebaran penyakit Meningitis menggunakan Metode Euler, Metode Heun dan Metode Runge-Kutta Orde Empat, Tesis, Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma
- Butcher, J. C. (2008). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. England: Jhon Wiley & Sons, Ltd.
- Chandio, M. S. & Memon, A. G. (2010) "Improving the Efficiency of Heun's Method," Sindh University Research Journal (Science Series), vol. 42, no. 2, pp. 85-88.
- Fredilina, K. Q. & Komang, T. W. (2018). Pemodelan Matematika dengan Metode Campak Runge- Kutta untuk Penyakit Campak menggunakan Matlab R2010. Jurnal Teknologi informasi dan Komputer, 4(2). 150-155.
- Ningsi, G. P., 2019. Penerapan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Iterasi Variasional dalam Menyelesaikan Sistem Transimi Tuberkulosis. Yogyakarta: Masters Thesis. Universitas Sanata Dharma.
- Ozalp, N., & Demirci, E. (2011). A fractional order SEIR model with vertical transmission," Mathematical and Computer Modeling. 54(1-2) 1-6.
- Zamzami, A. J., Waluya, S.B., & Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model Penyebaran Hiv/Aids Dengan Treatment. Unnes Journal of Mathematics. 7(2), 142-154.
- Desyanawati, E., Palgunadi, S., Cahyono, H. D. (2016). Simulation of the spreading of Infectious Disease HIV/AIDS in Central Java Using SIR Epidemic Model (Susceptible, Infected, removed). Jurnal Teknologi dan Informasi. 5(2) 1-10
- Anggraini, W., Hidayat, R., & Kusbudiona. (2014). Analisis Model SIR dengan Imigrasi dan Sanitasi pada penyakit Hepatitis A di Kabupaten Jember. Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Jember, 19 November 2014
- Tholleng, A., Komalig, H.A., & J. D. (2013). dinamika perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial NonLinear SIR. Jurnal Ilmiah Sains. 13 (1). 9-14
- Hurit, R. U., & Mungkasi, S. (2021). The Euler, Heun, and Fourth Order Runge-Kutta Solutions to SEIR Model for the Spread of Meningitis Disease. Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika 6 (2), 140-153
- Jaffaruddin., Pangaribuan, R. M., Aryanto., & Henukh, I. A. (2017). Analisis Kestabilan Model Host-Vector Transmisi HIV/AIDS Pada Pengguna Jarum Suntik. Jurnal Matematika. 7(1). 1-11